

Θεώρημα Bolzano

**Βέλτιστο
Σενάριο**

Γνωστικό αντικείμενο:

Μαθηματικά (ΔΕ)

Δημιουργός Σεναρίου: ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΑΡΑΦΗΣ (Εκπαιδευτικός)

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Σημείωση

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν αυτόματης δημιουργίας και εκτύπωσης του Ψηφιακού Διδακτικού Σεναρίου με Τίτλο: «**Θεώρημα Bolzano** ».

Δημιουργήθηκε στις **07/10/2015 - 12:35** και έχει υποστηρικτικό ρόλο στο έργο του εκπαιδευτικού.

Δεν αντικαθιστά το Ψηφιακό Διδακτικό Σενάριο, το οποίο περιέχει όλο το Διαδραστικό Περιεχόμενο και αξιοποιεί τις ψηφιακές δυνατότητες της Πλατφόρμας «Αίσωπος».

Το σενάριο αυτό έχει χαρακτηριστεί ως «Βέλτιστο» ύστερα από αξιολόγηση από δύο αξιολογητές και είναι αναρτημένο με το πλήρες ψηφιακό περιεχόμενό του στην Πλατφόρμα «Αίσωπος».

Το Διαδραστικό Ψηφιακό Διδακτικό Σενάριο με το πλήρες ψηφιακό περιεχόμενό του βρίσκεται στον σύνδεσμο:

<https://aesop.iep.edu.gr/node/11458>

Επισημαίνεται ότι τα σενάρια της Πλατφόρμας «Αίσωπος» διακρίνονται σε:

Υποδειγματικά Σενάρια: Ψηφιακά Διδακτικά Σενάρια που έχουν προκύψει από επιστημονικές επιτροπές εμπειρογνομώνων (Εκπαιδευτικοί Αυξημένων Προσόντων, Σχολικοί Σύμβουλοι, Μέλη ΔΕΠ / Επιστημονικό Προσωπικό του ΙΕΠ).

Βέλτιστα Σενάρια: Αξιολογημένα Ψηφιακά Διδακτικά Σενάρια εκπαιδευτικών με βαθμολογία άνω των 70 μονάδων.

Επαρκή Σενάρια: Αξιολογημένα Ψηφιακά Διδακτικά Σενάρια εκπαιδευτικών με βαθμολογία από 50 έως 70 μονάδες.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΕΡΓΟΥ

ΠΡΑΞΗ: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης» - MIS: 479325, ΣΑΕ: 2014ΣΕ24580051.

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του Υ.Π.Ο.ΠΑΙ.Θ.

Η Πλατφόρμα Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής, Αξιολόγησης και Παρουσίασης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος», αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης.

Ομάδα Επιστημονικής και Διοικητικής Εποπτείας της Πράξης:

Επιστημονικός Υπεύθυνος Πράξης για τις Δράσεις που αφορούν το Ι.Ε.Π: Ιωάννης Σταμουλάκης, Φιλολόγος, Σύμβουλος Α' Υ.Π.Ο.ΠΑΙ.Θ.

Υπεύθυνος Υποέργου 1: Ιωάννης Σταμουλάκης, Φιλολόγος, Σύμβουλος Α' Υ.Π.Ο.ΠΑΙ.Θ.

Υπεύθυνος Υποέργου 2: Νικόλαος Γραμμένος, Πληροφορικός, Σύμβουλος Γ' Ι.Ε.Π.

Υπεύθυνος Υποέργου 3: Νικόλαος Γραμμένος, Πληροφορικός, Σύμβουλος Γ' Ι.Ε.Π.

Επιστημονική Συντονίστρια των ειδικών επιστημόνων του Υποέργου 1: Βασιλική Καραμπέτσου, Φιλολόγος, Εισηγήτρια Ι.Ε.Π.

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του Υ.Π.Ο.ΠΑΙ.Θ.

Φύλλα Εργασίας Σεναρίου

Το παρόν ψηφιακό σενάριο περιέχει φύλλα εργασίας, τα οποία είναι συνημμένα στο αρχείο «PDF» και μπορείτε να τα ανοίξετε κάνοντας διπλό κλικ πάνω στο εικονίδιο.

- 1η Φάση: [fyllo_ergasias_1.1.docx](#) , [fyllo_ergasias_1.2.docx](#) , [fyllo_ergasias_1.3.docx](#)
- 2η Φάση: [fyllo_ergasias_2.1.docx](#) , [fyllo_ergasias_2.2.docx](#) , [fyllo_ergasias_2.3.docx](#)
- 3η Φάση: Δεν υπάρχει

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του Υ.Π.Ε.Θ.

Γενική Περιγραφή Σεναρίου

Γνωστικό Αντικείμενο

Μαθηματικά (ΔΕ) (Γενικό Λύκειο)

Εκπαιδευτικό Πρόβλημα

Η γεωμετρική προσέγγιση του θεωρήματος Bolzano θεωρείται σημαντική, ώστε να αναπτύξουν οι μαθητές μία επιπλέον αναπαράσταση σε σχέση με την συμβολική-μαθηματική γλώσσα και σε αυτό βοηθάει το λογισμικό Function Probe.

Επίσης, είναι σημαντικό να μπορούν οι μαθητές να εφαρμόζουν το θεώρημα επεξηγώντας τους λόγους εφαρμογής στην περίπτωση που ζητείται η ύπαρξη δύο ή περισσότερων ριζών μιας εξίσωσης $f(x)=0$ σε ένα διάστημα (α, β) . Επιπλέον, αποτελεί κρίσιμο ζήτημα η αξιοποίηση του θεωρήματος στην περίπτωση που ζητείται η ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=0$ σε διάστημα $[\alpha, \beta)$ ή $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta]$.

Οι μαθητές συνήθως δεν ερμηνεύουν σωστά την αναγκαιότητα των προϋποθέσεων του Θεωρήματος Bolzano ότι δηλαδή αν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος, τότε δεν μπορεί να υπάρχουν σημεία που μηδενίζουν την f (π.χ. όταν οι τιμές των άκρων είναι ομόσημες ή όταν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής). Επιπρόσθετα το σχολικό βιβλίο δεν συμβάλλει με κάποιο παράδειγμα-αντιπαράδειγμα στη σωστή ερμηνεία των προϋποθέσεων του θεωρήματος.

Οι μαθητές στο Γυμνάσιο έρχονται σε επαφή με την έννοια της ισοδύναμης εξίσωσης. Μια από τις περιπτώσεις είναι να αποδειχθεί ότι μια κλασματική εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση σε διάστημα όπου τα άκρα του διαστήματος είναι τιμές που μηδενίζουν τον παρονομαστή του κλάσματος. Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται οι μαθητές να ανακαλέσουν την έννοια της ισοδύναμης εξίσωσης για να αποδείξουν ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση.

Η ύπαρξη λύσης σε μια εξίσωση αποτελεί ερώτημα καθ' όλη την ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ Λύκειου. Έτσι οι μαθητές καλούνται να ελέγξουν αν μία εξίσωση έχει τουλάχιστον μια λύση και στις περιπτώσεις όπου στην εξίσωση εμφανίζεται ή η παράγωγος συνάρτησης ή ολοκλήρωμα συνάρτησης.

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Γενική περιγραφή περιεχομένου

Σκοπός του σεναρίου είναι οι μαθητές να διατυπώνουν το Θ. Bolzano και να το χρησιμοποιούν στην εύρεση λύσεων μιας εξίσωσης.

Το σενάριο στοχεύει οι μαθητές να αντιλαμβάνονται ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano όταν μια γραφική παράσταση συνάρτησης τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο. Επιπλέον στόχος με τη χρήση φύλλων εργασίας είναι οι μαθητές να μπορούν να εφαρμόζουν το θεώρημα στα κατάλληλα διαστήματα.

Μας ενδιαφέρει οι μαθητές να είναι σε θέση να ανταποκριθούν στην περίπτωση που ζητείται η εξίσωση να έχει τουλάχιστον δύο, τρεις λύσεις κ.λ.

Οι μαθητές επίσης καλούνται να διερευνήσουν την περίπτωση στην οποία η συνάρτηση είναι κλασματικής μορφής. (π.χ. η συνάρτηση έχει παρονομαστή $(x-\alpha)(x-\beta)$ και πρέπει να αποδείξουν ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (α, β))

Με το παρόν σενάριο οι μαθητές μέσω αντιπαραδειγμάτων να διακρίνουν περιπτώσεις όπου δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αλλά υπάρχουν τιμές που μηδενίζουν την συνάρτηση.

Η παρουσίαση του Θεωρήματος Bolzano στους μαθητές/τριες της Γ' Λυκείου, γίνεται με τη χρήση λογισμικού τύπου CAS.

Η μέθοδος διδασκαλίας που ακολουθείται είναι καθοδηγούμενη ανακάλυψη με ομαδοσυνεργατική μάθηση και χρήση ΤΠΕ. Με το λογισμικό Function Probe οι μαθητές έχουν μια γεωμετρική εσποπεία της συνάρτησης η οποία μερικές φορές έρχεται σε αντίθεση με τις προϋποθέσεις του θεωρήματος. Έτσι ανατροφοδοτείται ο διάλογος μεταξύ των μαθητών και του διδάσκοντα.

Απαιτείται από το διδάσκοντα ενεργός συμμετοχή σε διάφορα σημεία του σεναρίου, αφού ο σχεδιασμός του σεναρίου βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στις ερωτήσεις που θα κάνει υπό μορφή "σκαλωσιά".

Προαπαιτούμενα

Γνωστικό επίπεδο

- Υπολογισμός ορίου
- Ορισμός συνέχειας
- Υπολογισμός της τιμής της f σε συγκεκριμένη τιμή
- Θεώρημα Bolzano
- Πράξεις συναρτήσεων
- Γραφική παράσταση συνάρτησης

Τεχνικό επίπεδο

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Λογισμικό Fuction Probe

Διδακτικοί Στόχοι

- Να αναγνωρίζουν την ανάγκη χρήσης του θεωρήματος Bolzano.
- Να χρησιμοποιούν το θεώρημα Bolzano.
- Να συμπληρώνουν με γεωμετρική εποπτεία την προσέγγιση ριζών, όπου αυτό είναι εφικτό.
- Να χρησιμοποιούν λογισμικό για να προσδιορίζουν αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης.

Λέξεις κλειδιά που χαρακτηρίζουν τη θεματική του σεναρίου

- Θεώρημα Bolzano
- εύρεση λύση εξίσωσης

Υλικοτεχνική υποδομή

προβολικό μηχάνημα, Η/Υ, εργαστήριο πληροφορικής, φύλλα εργασίας

Τυπικός χρόνος αλληλεπίδρασης με το εκπαιδευτικό σενάριο σε διδακτικές ώρες για δουλειά εντός του σχολείου

3 ώρες

Πνευματικά δικαιώματα ή άλλοι αντίστοιχοι περιορισμοί

Όχι

Εκτιμώμενο Επίπεδο Δυσκολίας

Δύσκολο

Τύπος Διαδραστικότητας

Ενεργός μάθηση

Επίπεδο Διαδραστικότητας

υψηλό

Προτεινόμενη ηλικιακή ομάδα

15-18

Εκπαιδευτική Βαθμίδα που απευθύνεται το σενάριο

Γενικό Λύκειο

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Σύνοψη φάσεων σεναρίου:

1η Φάση: Θεώρημα Bolzano και εύρεση λύσεων

Χρονική Διάρκεια: 45λεπτά

Χώρος Διεξαγωγής: Σχολικό εργαστήριο πληροφορικής & εφαρμογών Η/Υ (ΣΕΠΕΗΥ)

Δομικά - Διαδραστικά στοιχεία:

2η Φάση: Οι υποθέσεις του θεωρήματος δεν είναι αναγκαίες

Χρονική Διάρκεια: 45λεπτά

Χώρος Διεξαγωγής: εργαστήριο πληροφορικής

Δομικά - Διαδραστικά στοιχεία:

3η Φάση: Έλεγχος κατανόησης-αυτοαξιολόγηση

Χρονική Διάρκεια: 45λεπτά

Χώρος Διεξαγωγής: εργαστήριο πληροφορικής

Δομικά - Διαδραστικά στοιχεία:

1. Ανακεφαλαίωση
2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση
3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση
4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση
5. Για κάθε ερώτηση να επιλέξετε τη λέξη Σωστή αν είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος αν είναι λανθασμένη

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

1η Φάση: Θεώρημα Bolzano και εύρεση λύσεων

Χρονική Διάρκεια: 45λεπτά

Χώρος Διεξαγωγής: Σχολικό εργαστήριο πληροφορικής & εφαρμογών Η/Υ (ΣΕΠΕΗΥ)

Αρχικά πραγματοποιείται συζήτηση με τους μαθητές και επιχειρείται να φανεί αν οι μαθητές είναι σε θέση να περιγράψουν το θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον x_0 που ανήκει στο (α, β) , τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο διάστημα (α, β) μια τουλάχιστον λύση.

Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες των δύο ατόμων. Ο ρόλος τους θα είναι αυτός του ερευνητή/τριας. Ο εκπαιδευτικός έχει το ρόλο του παρατηρητή κατά τη διάρκεια της διερεύνησης που κάνουν οι μαθητές, ενώ μπορεί να παρέμβει με αναστοχαστικά και παρωθητικά σχόλια.

Στη συνέχεια εργάζονται με το λογισμικό Function Probe, όπου καλούνται να μελετήσουν συγκεκριμένες συναρτήσεις. Μέσω του σχεδιασμού των γραφημάτων εντοπίζουν την ύπαρξη ή μη των ριζών και έχουν μία αρχική προσέγγιση για την περιοχή που βρίσκεται η ρίζα (οι ρίζες). Με τη βοήθεια των δραστηριοτήτων της πρώτης διδακτικής περιόδου, οι μαθητές α) θα χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στην εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στα Μαθηματικά β) θα εξηγήσουν γιατί και σε ποια περίπτωση χρειάζεται να χωρίσουν το διάστημα στο οποίο ζητούνται οι ρίζες σε δύο ή περισσότερα διαστήματα και να εφαρμόσουν το θεώρημα Bolzano σε καθένα απ' αυτά.

Με το Φ.Ε. 1.1 οι μαθητές/τριες θα εφαρμόσουν το Θ. Bolzano αφού προβληματιστούν για το διάστημα που θα πρέπει να επιλέξουν για να εφαρμόσουν το θεώρημα. Περιμένουμε ότι όλοι οι μαθητές δεν θα επιλέξουν το ίδιο διάστημα. Αυτό το σημείο θα αποτελέσει αφορμή για συζήτηση. Με την ποικιλομορφία των διαστημάτων θα διαπιστώσουν ότι αν υπάρχει λύση σε ένα διάστημα τότε υπάρχει λύση και σε οποιοδήποτε μεγαλύτερο διάστημα το οποίο περιλαμβάνει το μικρότερο, χωρίς να ισχύει το αντίστροφο.

Η γεωμετρική εποπτεία θα αναδείξει τους παραπάνω προβληματισμούς των μαθητών.

Με το Φ.Ε. 1.2 οι μαθητές αφού παρατηρήσουν με τη γεωμετρική εποπτεία ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο λύσεις καλούνται να ελέγξουν αλγεβρικά σε ποια διαστήματα εμφανίζονται οι δύο λύσεις. Περιμένουμε ότι όλοι οι μαθητές δεν θα επιλέξουν ίδια διαστήματα οπότε αυτό θα δώσει το έναυσμα να γίνει συζήτηση για το ποιο διάστημα είναι το πιο σωστό.

Τέλος οι μαθητές με τη γενίκευση των συμπερασμάτων διαπιστώνουν ότι το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί για την εύρεση τουλάχιστον δύο λύσεων, τριών λύσεων και περισσότερων.

Με το Φ.Ε. 1.3 θα διαπιστώσουν ότι όταν η συνάρτηση είναι κλασματικής μορφής και ζητείται λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ σε διάστημα που οι τιμές των άκρων μηδενίζουν τον παρονομαστή της συνάρτησης τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα.

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με έδαφος από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονικό Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Πρέπει οι μαθητές να θεωρήσουν καινούργια εξίσωση η οποία όμως πρέπει να είναι ισοδύναμη της αρχικής. Περιμένουμε ότι οι μαθητές θα προβληματιστούν αρκετά στην εύρεση της καινούργιας εξίσωσης.

Φύλλα εργασίας:

1. [fyllo_ergasias_1.1.docx](#)
2. [fyllo_ergasias_1.2.docx](#)
3. [fyllo_ergasias_1.3.docx](#)

2η Φάση: Οι υποθέσεις του θεωρήματος δεν είναι αναγκαίες

Χρονική Διάρκεια: 45λεπτά

Χώρος Διεξαγωγής: εργαστήριο πληροφορικής

Αρκετοί μαθητές θεωρούν ότι για να έχει μια εξίσωση τουλάχιστον μια λύση θα πρέπει να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano. Οι προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες. Οι μαθητές παρερμηνεύουν το θεώρημα, υποστηρίζοντας ότι όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, τότε δεν μπορεί να υπάρχουν σημεία μηδενισμού της f .

Με το Φ.Ε. 2.1 οι μαθητές υπολογίζουν ότι $f(1), f(4) > 0$ και ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[1,4]$. Μια πρώτη αντίδραση είναι να πιστέψουν ότι η συνάρτηση f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$ διότι δεν ικανοποιείται η μία προϋπόθεση του θεωρήματος. Όμως από τη γεωμετρική εποπτεία παρατηρούν ότι αυτό έρχεται σε αντίθεση με το προηγούμενο αποτέλεσμα. Δηλαδή παρατηρούν ότι η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στις τιμές 2 και 3.

Δεν ισχύει η προϋπόθεση ότι οι τιμές των άκρων είναι ετερόσημες παρ'όλα αυτά έχουμε δύο λύσεις. Περιμένουμε οι μαθητές να προβληματιστούν για τα διαφορετικά συμπεράσματα. Μετά από συζήτηση συμπεραίνουν οι μαθητές ότι μπορεί να μην ισχύει κάποια από τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αλλά η εξίσωση $f(x)=0$ μπορεί να έχει λύση.

Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θέτει προς συζήτηση, με αφορμή το κλειστό διάστημα $[1,4]$, τις περιπτώσεις εφαρμογής του θεωρήματος σε διαστήματα της μορφής $[\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta]$;

Με το Φ.Ε. 2.2 οι μαθητές σταδιακά καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι το θεώρημα Bolzano εφαρμόζεται και σε περιπτώσεις όπου το διάστημα δεν είναι της μορφής (α, β) . Στις περιπτώσεις των διαστημάτων $[\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta]$ πρέπει να γίνει έλεγχος αν τα άκρα των διαστημάτων (όπου είναι κλειστό) είναι ρίζες της εξίσωσης. Έτσι οι μαθητές γενικεύουν το συμπέρασμα του Θ. Bolzano, ότι δηλαδή το θεώρημα εφαρμόζεται και σε περιπτώσεις όπου το διάστημα δεν είναι της μορφής (α, β) .

Με το Φ.Ε. 2.3 οι μαθητές υπολογίζουν ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x=3$ και $f(1), f(6) < 0$. Δηλαδή δεν

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano (η f δεν είναι συνεχής για $x=3$, και οι τιμές της f στα άκρα του πεδίου ορισμού είναι ομόσημες). Όμως από τη γεωμετρική εποπτεία παρατηρούν ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x=2$. Έτσι διαπιστώνουν οι μαθητές ότι μπορεί να μην ισχύει καμία από τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αλλά η εξίσωση $f(x)=0$ μπορεί να έχει λύση.

Από το διδάσκοντα τίθεται το ερώτημα: τελικά τι ισχύει για τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano;

Μετά την ενασχόληση με τα φύλλα εργασίας και με τις συζητήσεις που προηγήθηκαν οι μαθητές καταλήγουν τελικά ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι ικανές αλλά όχι αναγκαίες.

Φύλλα εργασίας:

1. [fyllo_ergasias_2.1.docx](#)
2. [fyllo_ergasias_2.2.docx](#)
3. [fyllo_ergasias_2.3.docx](#)

3η Φάση: Έλεγχος κατανόησης-αυτοαξιολόγηση

Χρονική Διάρκεια: 45λεπτά

Χώρος Διεξαγωγής: εργαστήριο πληροφορικής

Στη φάση αυτή οι μαθητές μέσω των ερωτήσεων Σωστού-Λάθους, Πολλαπλής Επιλογής, θα εμπλακούν σε διαδικασίες ελέγχου κατανόησης και αυτοαξιολόγησης. Δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα σε ερωτήσεις οι οποίες περιέχουν γεωμετρική εποπτεία ώστε να γίνει διασύνδεση με τις αλγεβρικές εφαρμογές.

Οι εν λόγω διαδικασίες μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο συζήτησης και αναστοχασμού στην τάξη εφόσον ο χρόνος το επιτρέπει.

Φύλλα εργασίας:

1. Ανακεφαλαίωση

Τύπος Δομικού/Διαδραστικού Εργαλείου: 103

Υπερσύνδεσμος: <http://aesop.iep.edu.gr/node/11458/1172#13638>

2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Τύπος Δομικού/Διαδραστικού Εργαλείου: 72

Υπερσύνδεσμος: <http://aesop.iep.edu.gr/node/11458/1172#13639>

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.

Τύπος Δομικού/Διαδραστικού Εργαλείου: 72

Υπερσύνδεσμος: <http://aesop.iep.edu.gr/node/11458/1172#13641>

4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Τύπος Δομικού/Διαδραστικού Εργαλείου: 72

Υπερσύνδεσμος: <http://aesop.iep.edu.gr/node/11458/1172#13651>

5. Για κάθε ερώτηση να επιλέξετε τη λέξη Σωστή αν είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος αν είναι λανθασμένη

Τύπος Δομικού/Διαδραστικού Εργαλείου: 77

Υπερσύνδεσμος: <http://aesop.iep.edu.gr/node/11458/1172#13652>

Το παρόν έγγραφο αποτελεί προϊόν της Πλατφόρμας Ανάπτυξης, Σχεδίασης, Υποβολής και Αξιολόγησης Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων «Αίσωπος» που αναπτύχθηκε με ίδια μέσα από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής στο πλαίσιο του Υποέργου 2: «Ψηφιακό Σύστημα - Ηλεκτρονική Πλατφόρμα Υποβολής, Αξιολόγησης, Διαχείρισης και Αξιοποίησης Ψηφιακών Σεναρίων καθώς και καθοδήγησης και Υποστήριξης των Εκπαιδευτικών» της Πράξης: «Ανάπτυξη Μεθοδολογίας και Ψηφιακών Διδακτικών Σεναρίων για τα Γνωστικά Αντικείμενα της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Γενικής και Επαγγελματικής Εκπαίδευσης».

Η πράξη συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (ΕΚΤ) και το Ελληνικό Δημόσιο στο πλαίσιο του ΕΠ «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» του ΕΣΠΑ 2007-2013 και υλοποιείται σε σύμπραξη από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής και την Ειδική Υπηρεσία Εφαρμογής Εκπαιδευτικών Δράσεων του ΥΠ.Π.Ε.Θ.