Αντιστροφή

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας κανόνας ο οποίος επιτρέπει την μετάβαση από ένα σχήμα σε ένα άλλο, με τέτοιο τρόπο ώστε το δεύτερο σχήμα να είναι τελείως ορισμένο όταν το πρώτο είναι δοσμένο και αντίστροφα. Μια τέτοια μετάβαση καλείται **γεωμετρικός μετασχηματισμός**. Οι πιο κοινοί στη χρήση τους μετασχηματισμοί είναι η στροφή ενός σχήματος, η προβολή, και η αντιστροφή. Η αντιστροφή χρησιμοποιείται εκτεταμένα στα μαθηματικά, για παράδειγμα σαν μια μέθοδος επίλυσης προβλημάτων κατασκευών στη θεωρία συναρτήσεων μιγαδικών μεταβλητών, και στη σπουδή των απεικονίσεων στο υπερβολικό επίπεδο.

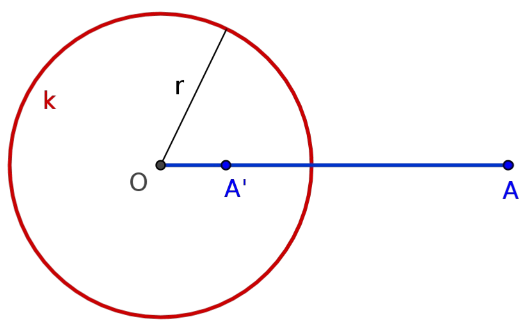
Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε την αντιστροφή , τις έννοιες που σχετίζονται μ' αυτήν και θα μελετήσουμε τις βασικές της ιδιότητες.

Έστω κ ένας κύκλος του επιπέδου, με ακτίνα r και κέντρο το σημείο Ο. Ας είναι επίσης Α ένα σημείο που δεν ταυτίζεται με το κέντρο Ο. Λαμβάνουμε το σημείο Α΄ πάνω στην ακτίνα ΟΑ με τέτοιο τρόπο ώστε το γινόμενο του ΟΑ με το ΟΑ΄ να ισούται με το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου κ:

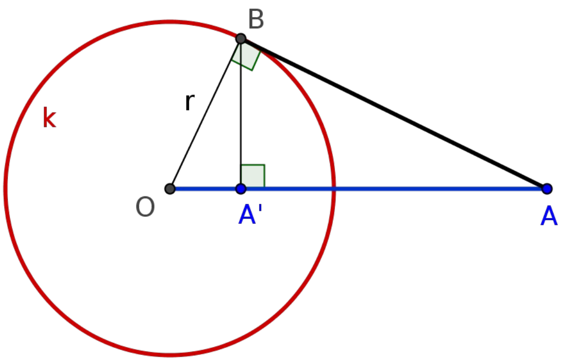
$$OA \cdot OA' = r^2 \quad (1)$$

Συμφωνούμε να λέμε ότι τα σημεία Α και Α΄ είναι **συμμετρικά** ως προς τον κύκλο κ.

Αν κάποιο από τα σημεία Α και Α΄ είναι έξω από τον κύκλο τότε το άλλο κείται στο εσωτερικό του κύκλου, και αντίστροφα. Για παράδειγμα, από την ανισότητα ΟΑ>r , προκύπτει με βάση την εξίσωση (1) ότι ΟΑ΄< r. Αν κάποιο από τα Α ή Α΄ ανήκει πάνω στον κύκλο κ, τότε τα Α και Α συμπίπτουν.



Θεωρούμε το σχ.1 στο οποίο ΑΒ είναι η εφαπτομένη του κύκλου κ, και ΒΑ΄ είναι η κάθετη στο ΟΑ.



Σχ.1

Αφού ΟΑ΄ είναι η προβολή του τμήματος ΟΒ του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ πάνω στη υποτείνουσα ΟΑ,

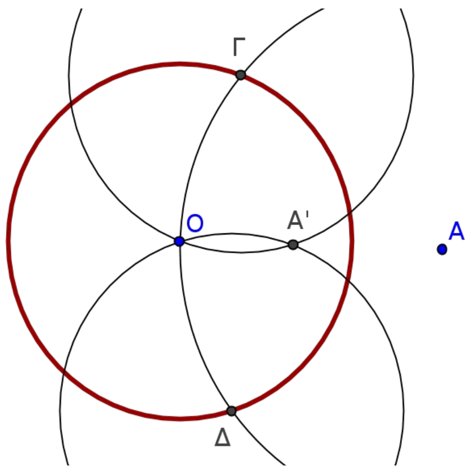
$$OA \cdot OA' = OB^2 = r^2$$

Τα σημεία Α και Α΄ επομένως είναι συμμετρικά ως προς τον κ. Αυτός είναι προφανώς ο τρόπος κατασκευής του Α΄ όταν το Α είναι δοσμένο, και του Α όταν το Α΄ είναι δοσμένο.

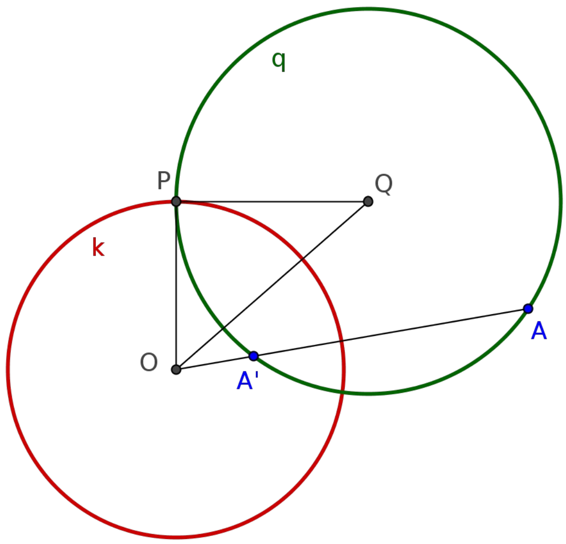
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται μια μέθοδος για την κατασκευή του συμμετρικού του Α ως προς κύκλο (Ο,r) με χρήση μόνο του διαβήτη, με την προϋπόθεση ότι ο κύκλος (Α,ΑΟ) τέμνει τον κύκλο κ.

Τα βήματα είναι τα εξής:

1. Σχεδιάζουμε τον κύκλο (Α,ΑΟ)
2. Αν ο παραπάνω κύκλος τέμνει τον κ στα Γ, Δ, γράφουμε τους κύκλους (Γ,ΓΟ) και (Δ,ΔΟ).
3. Το δεύτερο κοινό σημείο Α' των κύκλων (Γ,ΓΟ), (Δ,ΔΟ) είναι το συμμετρικό του Α ως προς κ.



Θεώρημα 1. *Αν ο κύκλος q διέρχεται από τα διακριτά σημεία A και A΄, συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ, τότε οι κύκλοι κ και q είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι.*



Σχ.2

Δυο κύκλοι λέμε ότι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι αν αυτοί τέμνονται υπό ορθή γωνία, δηλαδή αν οι εφαπτόμενές τους στο σημείο τομής τους (ή ισοδύναμα αν οι ακτίνες που φέρονται στο σημείο αυτό) είναι μεταξύ τους κάθετες.

Έστω P ένα από τα σημεία τομής των κύκλων κ, q (σχ.2). Αφού OP είναι ακτίνα του κ, η εξίσωση (1) λαμβάνει τη μορφή $OA \cdot OA' = OP^2$. Από την άλλη μεριά , το γινόμενο των τμημάτων OA και OA΄ είναι ίσο με το τετράγωνο του εφαπτόμενου τμήματος από το O προς τον κύκλο q. Έτσι προκύπτει ότι το OP είναι εφαπτόμενο στον q, άρα οι ακτίνες OP και QP είναι κάθετες μεταξύ τους, δηλαδή οι κύκλοι είναι ορθογώνιοι.

Σημειώστε ότι ένας κύκλος που περνάει από δυο διακριτά σημεία, συμμετρικά ως προς μια ευθεία γραμμή, τέμνει την ευθεία υπό ορθές γωνίες. Η αναλογία ανάμεσα στην ιδιότητα αυτή και το γεγονός που αποδείχτηκε στο θεώρημα 1, επάγει την μεταφορά του όρου «συμμετρία» στην περίπτωση των δυο σημείων που είναι έτσι κείμενα ως προς δοθέντα κύκλο, ώστε ένας κύκλος που διέρχεται από αυτά να είναι ορθογώνιος προς τον δοσμένο κύκλο.

Θεώρημα 2. *Αν οι κύκλοι κ και q είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι, τότε μια ευθεία που διέρχεται από το κέντρο Ο του κ και τέμνει τον q,τον τέμνει σε σημεία συμμετρικά ως προς κ.*

Ας σημειώσουμε τα σημεία στα οποία η ευθεία γραμμή τέμνει τον q με Α Α΄, και ένα από τα κοινά σημεία των δυο κύκλων κ και q με P (σχ.2) . Αφού οι κύκλοι είναι μεταξύ τους ορθογώνιοι η ευθεία ΟΡ είναι εφαπτομένη στον q, επομένως, $ΟΑ \cdot ΟΑ' = ΟΡ^2$. Έτσι προκύπτει ότι τα σημεία Α και Α΄ είναι συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ.

Θεώρημα 3. *Δοθέντος ενός τριγώνου ΟΑΒ όπου Ο είναι το κέντρο ενός κύκλου κ, και σημείων Α΄ και Β' συμμετρικών των Α και Β ως προς τον κ, τότε*

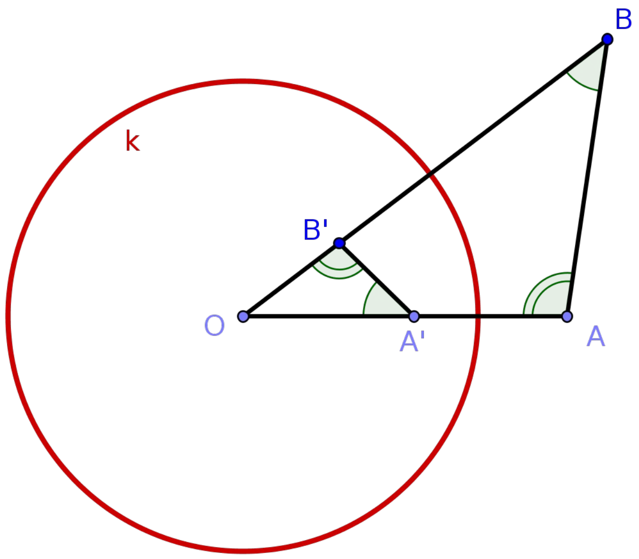
$$\angle OAB = \angle OB'A' \text{ και } \angle OBA = \angle OA'B'$$

Θεωρούμε το σχ.3. Από την εξίσωση

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$$

η οποία προκύπτει από την συνθήκη (1), λαμβάνουμε ΟΑ:ΟΒ΄=ΟΒ:ΟΑ΄. Επομένως τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑ΄Β΄, που έχουν μια κοινή γωνία ΑΟΒ, είναι όμοια. Έτσι συνάγουμε ότι το θεώρημα είναι έγκυρο.

Σημειώστε ότι ένας κύκλος μπορεί να περάσει από τις κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΒ΄Α΄ αφού <Α΄ΑΒ+<Α΄Β΄Β=π. Όπως προκύπτει από το Θεώρημα 1, αυτός ο κύκλος είναι ορθογώνιος στον κ.



Σχ.3

Τώρα ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό του επιπέδου που στο σημείο Α αντιστοιχεί το συμμετρικό του Α' ως προς τον κύκλο κ. Αυτός ο μετασχηματισμός καλείται **αντιστροφή**, ο κύκλος κ καλείται **κύκλος της αντιστροφής**, και το κέντρο του **πόλος της αντιστροφής.** Αν η αντιστροφή που αντιστοιχεί στον κ, μεταφέρει ένα σχήμα Σ στο Σ΄, τότε λέμε ότι το Σ είναι συμμετρικό με το Σ΄ και το Σ΄ με το Σ, ως προς τον κύκλο κ.

Σημειώστε ότι δεν υπάρχει σημείο το οποίο να είναι συμμετρικό ως προς τον πόλο της αντιστροφής, που αντιστοιχεί στο κέντρο του κύκλου αντιστροφής κ. Για το λόγο αυτό πολλές φορές εισάγουμε ένα "κατ' εκδοχήν" ή "επ' άπειρον" σημείο του επιπέδου P_∞ και θεωρούμε ότι ο πόλος της αντιστροφής αντιστοιχίζεται στο σημείο αυτό.

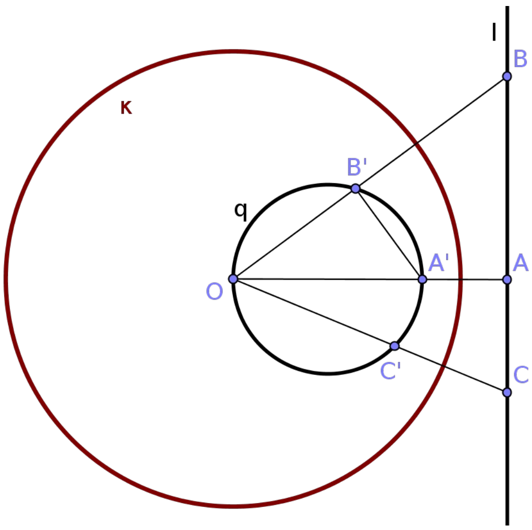
Παρατήρηση: Όπως διαπιστώνουμε από το σχήμα 3, τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒ'Α' είναι όμοια. (Σε ένα τέτοιο σχήμα, λέμε ότι οι ευθείες ΑΒ και Α'Β' είναι αντιπαράλληλες). Από την ομοιότητα αυτή προκύπτει ότι $\frac{OA}{OB'}=\frac{OB}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}$ η οποία λόγων των σχέσεων ΟΑ·ΟΑ'=r^2 και ΟΒ·ΟΒ'=r^2 μας δίνει τελικά

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB \quad \text{και} \quad AB = \frac{r^2}{OA' \cdot OB'} A'B'$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι τα σημεία που βρίσκονται έξω από την περιοχή που φράσσεται από τον κύκλο αντιστροφής, μετασχηματίζονται σε σημεία στο εσωτερικό του, εξαιρουμένου του πόλου αντιστροφής, και αντίστροφα. Τα σημεία του κύκλου αντιστροφής μετασχηματίζονται στον εαυτό τους.

Μια ευθεία που διέρχεται από τον πόλο Ο της αντιστροφής, μετασχηματίζεται στον εαυτό της εξαιρουμένου του σημείου Ο.

Θεώρημα 4. *Μια ευθεία που δεν διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής, μετασχηματίζεται με αντιστροφή σε κύκλο που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής.*



Σχ.4

Έστω Α το ίχνος της καθέτου από το Ο προς την ευθεία l, Β ένα τυχαίο σημείο της ευθείας l και Α΄,Β΄ τα συμμετρικά των Α, Β αντίστοιχα ως προς τον κύκλο αντιστροφής κ (σχ.4). Κατασκευάζουμε τον κύκλο q με διάμετρο το τμήμα ΟΑ΄. Από το θεώρημα 3 , <ΟΒΆ΄=<ΟΑΒ, επομένως <ΟΒΆ΄=π/2. Έτσι το σημείο Β΄ ανήκει στον κύκλο q. Από την άλλη μεριά, έστω C΄ σημείο του q διάφορο του Ο. Τότε η ευθεία ΟC΄ τέμνει την l σε κάποιο σημείο C το οποίο μετασχηματίζεται με αυτή την αντιστροφή, όπως αμέσως μπορούμε να δούμε, στο σημείο C΄. Έτσι το θεώρημα έχει αποδειχτεί , όμως οφείλουμε να θυμόμαστε ότι η ευθεία l μετασχηματίζεται σε ένα σχήμα που είναι ο κύκλος q δίχως το σημείο O.

Ας σημειωθεί ότι το κέντρο του κύκλου q ανήκει στην κάθετη που φέρεται από το O προς την l.

Αν η ευθεία l δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο αντιστροφής κ, τότε ο q κείται στο εσωτερικό του κ.

Αν η l είναι εφαπτόμενη του κ σε κάποιο σημείο του, τότε ο q εφάπτεται στον κ στο ίδιο σημείο.

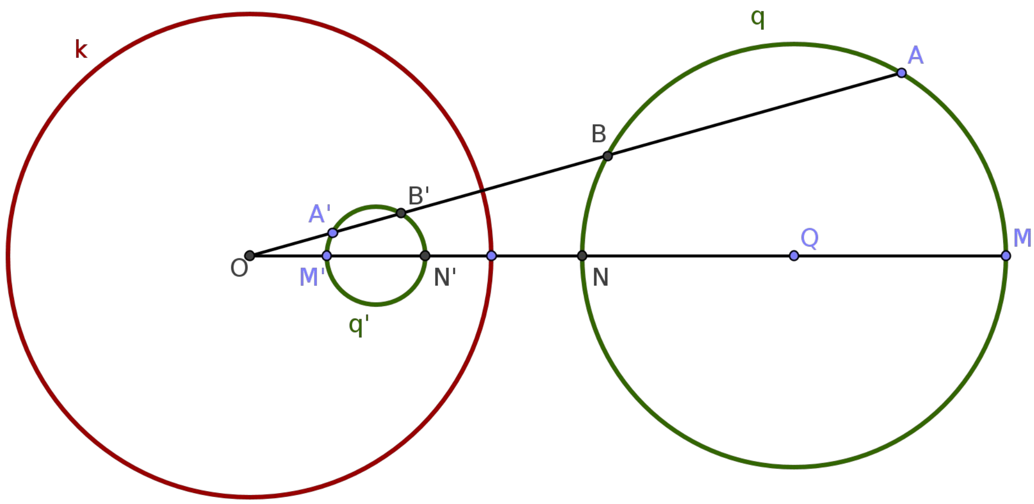
Αν l και κ τέμνονται, τότε ο q περνάει από τα σημεία τομής τους.

Θεώρημα 5. *Η αντιστροφή μεταφέρει έναν κύκλο που διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής , σε μια ευθεία γραμμή η οποία δεν διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής.*

Έστω O (ο πόλος αντιστροφής), A και B διακριτά σημεία πάνω στον κύκλο q, και A΄,B΄, δυο σημεία συμμετρικά των A,B ως προς τον κύκλο αντιστροφής. Δυνάμει του θεωρήματος 4, η ευθεία A΄B΄ μεταφέρεται σε έναν κύκλο που διέρχεται από τα O, A και B δηλαδή στον κύκλο q. Έτσι προκύπτει ότι ο q έχει απεικονιστεί στην ευθεία A΄B΄.

Θεώρημα 6. *Η αντιστροφή απεικονίζει έναν κύκλο που δεν διέρχεται από τον πόλο αντιστροφής σε έναν κύκλο ο οποίος επίσης δεν περνά από τον πόλο αντιστροφής.*

Έστω κ είναι ο κύκλος αντιστροφής με ακτίνα r και κέντρο O , και q ο δοσμένος κύκλος που δεν διέρχεται από το O (σχ.5).



Σχ.5

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Α πάνω στον q και σημειώνουμε το δεύτερο σημείο τομής της ευθείας ΟΑ και του q με Β, και τα συμμετρικά των Α και Β ως προς κ με Α΄ και Β΄. Τότε

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2$$

Έτσι $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$ (2) και $OA \cdot OB \cdot OA' \cdot OB' = r^4$

Το γινόμενο ΟΑ·ΟΒ=g δεν μεταβάλλεται, σύμφωνα με ένα πολύ γνωστό θεώρημα της στοιχειώδους γεωμετρίας, όταν το σημείο Α αλλάζει θέση πάνω στον q. Επομένως g είναι μια σταθερή ποσότητα, θετική όταν Ο είναι έξω από τον q , και αρνητική όταν το Ο είναι μέσα στον q (αφού , στην δεύτερη περίπτωση , οι διευθύνσεις του τμήματος ΟΑ και ΟΒ είναι αντίθετες).

Από τις τελευταίες δυο εξισώσεις παίρνουμε $OA' \cdot OB' = \frac{r^4}{g}$

Επομένως $\frac{OA}{OB'} \cdot \frac{OB}{OA'} = \frac{g^2}{r^4}$ και από την εξίσωση (2) προκύπτει

$\frac{OA}{OB'} = \frac{g}{r^2}$ (2.1) (το πρόσημο έχει επιλεχθεί ορθά αφού τα τμήματα ΟΒ και ΟΒ΄ έχουν την ίδια διεύθυνση). Όπως προκύπτει από την τελευταία εξίσωση τα σχήματα που ιχνογραφούνται από τα σημεία Α και Β΄ είναι όμοια, συνεπώς το θεώρημα έχει αποδειχτεί: Το σημείο Β΄ γράφει έναν κύκλο τον οποίο σημειώνουμε με q΄. Αν ρ, ρ' είναι οι ακτίνες των κύκλων q, q' αντίστοιχα τότε σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει:

$\rho' = \frac{r^2}{g}\rho$ (2.2) σχέση εξαιρετικά χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές της θεωρίας αντιστροφής.

Ο πόλος αντιστροφής Ο θα είναι το κέντρο ομοιοθεσίας των κύκλων q ,q΄, εξωτερικό αν $g>0$, και εσωτερικό αν $g<0$. Στην πρώτη περίπτωση το Ο βρίσκεται έξω, και στην δεύτερη περίπτωση μέσα στους κύκλους q, q΄.

Αν ο q είναι εφαπτόμενος του κ σε κάποιο σημείο του, τότε q΄ είναι εφαπτόμενος στον κ στο ίδιο σημείο.

Αν οι κ και q τέμνονται, τότε q΄ περνάει επίσης από αυτά τα σημεία τομής.

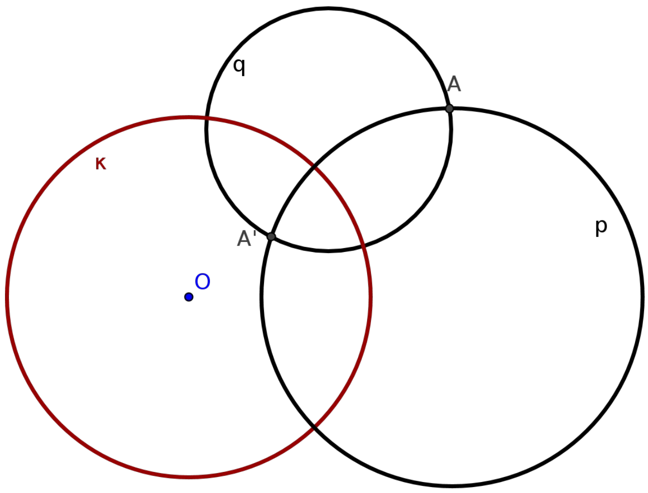
Ένας κύκλος q ορθογώνιος στον κ , μεταφέρεται στον εαυτό του μέσω της αντιστροφής που αντιστοιχεί στον κ (q΄ συμπίπτει με τον q), όπως προκύπτει από το θεώρημα 2.

Αν η ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων κ και q τέμνει τον q στα σημεία Μ και Ν, τότε το τμήμα Μ΄Ν΄(όπου Μ΄ και Ν΄ είναι τα συμμετρικά των Μ και Ν αντίστοιχα ως προς τον κ) θα είναι διάμετρος του κύκλου q΄. (σχ. 5). Αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε τον κύκλο q΄.

Ας σημειωθεί ότι τα κέντρα των κύκλων q, q΄ δεν είναι συμμετρικά ως προς την αντιστροφή που ορίζεται από τον κ.

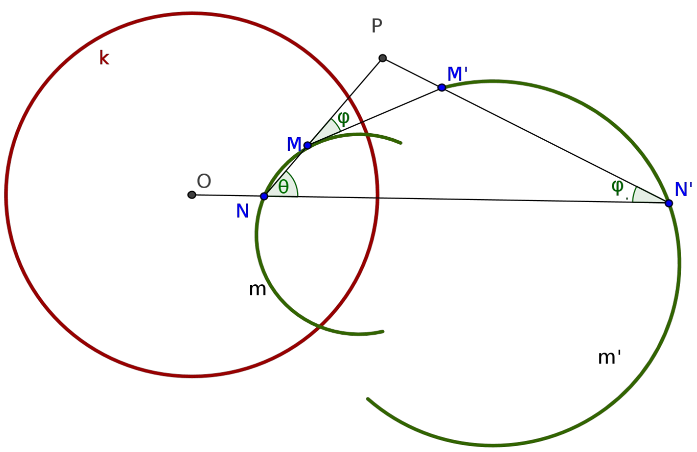
Θεώρημα 7. *Τα σημεία τομής δυο κύκλων p και q, ορθογώνιων ως προς τον κύκλο κ, είναι συμμετρικά ως προς κ.*

Το θεώρημα είναι φανερό αφού καθένας από τους κύκλους p,q μεταφέρεται στον εαυτό του μέσω της αντιστροφής ως προς κ. Κατά συνέπεια τα σημεία τομής τους A και A' θα εναλλάσσουν θέσεις. (σχ.6).



Σχ.6

Θεώρημα 8. *Αν M και M΄ είναι δυο σημεία συμμετρικά ως προς τον κύκλο κ πάνω σε δυο καμπύλες m και* m΄, *επίσης συμμετρικών ως προς κ, τότε οι εφαπτόμενες των m,m΄ στα σημεία M και M΄ είναι η κάθε μια κάθετη στην ευθεία MM΄ ή ορίζουν με αυτήν την ευθεία ισοσκελές τρίγωνο με βάση το τμήμα MM΄.*



Σχ.7

Παίρνουμε πάνω στην m ένα σημείο Ν, διαφορετικό από το Μ και σχεδιάζουμε το σημείο Ν΄ συμμετρικό του Ν ως προς κ. (σχ.7). Είναι φανερό ότι το Ν΄ ανήκει στην m΄. Οι ευθείες ΜΜ΄ και ΝΝ΄ διέρχονται από το κέντρο Ο του κύκλου κ. Κατασκευάζουμε τις ευθείες ΜΝ και Μ΄Ν΄ σημειώνοντας το σημείο τομής τους με Ρ. Αν ‹ΜΟΝ=θ, ‹ΟΜΝ=φ τότε δυνάμει του θεωρήματος 3, ‹ΟΝ΄Μ΄=φ.
Επομένως στο τρίγωνο ΜΜ΄Ρ είναι ‹Μ=φ, ‹Μ΄=φ+θ

Έστω ότι η γωνία θ τείνει στο μηδέν, υπό την συνθήκη ότι το σημείο Μ είναι σταθερό. Τότε στον οριακό σχηματισμό τα τμήματα ΜΝ και Μ΄Ν΄ θα είναι μετασχηματισμένα στις εφαπτόμενες των m, m΄ στα σημεία Μ και Μ΄, και το τρίγωνο ΜΜ΄Ρ θα γίνεται ισοσκελές. Πράγματι

$$\lim_{\theta\to 0}(\varphi+\theta)=\lim_{\theta\to 0}\varphi+\lim_{\theta\to 0}\theta=\lim_{\theta\to 0}\varphi$$

Έτσι το θεώρημα έχει αποδειχτεί.

Θεώρημα 9. *Η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες.*

Ας θεωρήσουμε τις ευθείες m ,n οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Αν η αντιστροφή ως προς τον κύκλο κ μεταφέρει τις m,n και το Α στις m΄, n΄ και Α΄, τότε όπως προκύπτει από το θεώρημα 8 , η γωνία μεταξύ των εφαπτόμενων των m,n στο Α, είναι ίση με την γωνία των εφαπτόμενων των m΄,n΄ στο σημείο Α΄.

Ένας μετασχηματισμός ο οποίος διατηρεί τις γωνίες ονομάζεται **σύμμορφος**. Έτσι όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, η αντιστροφή είναι ένας σύμμορφος μετασχηματισμός.

Παρατήρηση: *Αν τα σημεία Α και Β, είναι συμμετρικά ως προς κύκλο κ, και αντιστρέψουμε όλη των κατασκευή ως προς ένα νέο κύκλο ω, τότε τα αντίστροφα Α' και Β' των Α και Β ως προς ω, είναι συμμετρικά ως προς το αντίστροφο κ' του κύκλου κ ως προς ω.*

Πράγματι, αν θεωρήσουμε δυο κύκλους $κ_1$, $κ_2$ που να διέρχονται από τα Α, Β, τότε οι $κ_1$, $κ_2$ θα είναι ορθογώνιοι στον κύκλο κ. Αφού όμως η αντιστροφή διατηρεί τις γωνίες, και τα αντίστροφα $κ_1'$, $κ_2'$ των $κ_1$, $κ_2$ θα είναι ορθογώνια στο αντίστροφο κ' του κ. Έτσι τα σημεία Α' και Β' θα είναι τα σημεία τομής των $κ_1'$ και $κ_2'$ συνεπώς θα είναι συμμετρικά ως προς κ'.

Βιβλιογραφία

1. LOBACHEVSKIAN GEOMETRY - A.S. SMOGORZHEVSKY
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΠΑΡΙΣ ΠΑΜΦΙΛΟΣ
3. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ - Vladimir Dubrovsky - Άρθρο στο περιοδικό QUANTUM 1999 Τ.6/Τ.6
4. Ευκλείδειος Γεωμετρία – Σπ. Κανέλλου
5. ΜΕΓΑΛΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΓΚΥΚΛΟΠΑΙΔΕΙΑ τ.2
6. ADVANCED EUCLIDEAN GEOMETRY – ROGER JOHNSON